UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 122-142

Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Ana Leyendecker, Daniela Müller

Fecha de recepción: 2016-10-06
Fecha de aceptación: 2017-01-02

Resumen	Considerando la importancia del estudio de las funciones en Ingeniería Agronómica, se decidió diseñar e implementar una situación de aprendizaje para dar significado a la función de primer grado como modelo de fenómenos de cambio. Se enuncian las actividades propuestas y se presentan algunos resultados de su implementación, en cuanto a los logros y a las dificultades detectadas.Los alumnos fueron capaces de reconocer elementos importantes que caracterizan a esta función e identificar el tipo de situaciones que permite modelar. Las tareas promovieron el empleo de estrategias y argumentos importantes para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. **Palabras clave**: pensamiento variacional, enseñanza, aprendizaje, universidad
Abstract	Given the importance of the study of functions in Agronomic Engineering we decided to design and implement a learning situation to give meaning to the first-degree function as a model for change phenomena. In this paper, we present the proposed activities, present some results of its implementation and describe the successes and difficulties encountered. The students were able to recognize important elements that characterize this function and identified the type of situation that allows modeling. The tasks promoted the use of strategies and important arguments to the development of the thought and variational language arguments. **Keywords**: variational thinking, teaching, learning, university
Resumo	Considerando a importância do estudo das funções em Engenharia Agronômica, decidiu-se desenhar e implementar uma situação de aprendizagem para dar significado à função de primeiro grau como um modelo de fenômenos de mudança. Enunciam-se as atividades propostas e se apresentam alguns resultados da sua implementação, quanto as metas atingidas e dificuldades detectadas. Os alunos foram capazes de reconhecer elementos importantes que caracterizam essa função e de identificar os tipos de situações que se permite modelar. As tarefas promoveram o emprego de estratégias e argumentos importantes para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem variacional. **Palavras-chave:** pensamento variacional, ensino, aprendizagem, universidade

1. Introducción

Al iniciar el estudio de matemática en Ingeniería Agronómica es importante que los estudiantes conozcan y comprendan diferentes herramientas que les permitan crear o interpretar modelos matemáticos que reflejen la realidad de su entorno y utilizar la matemática en la solución de problemas.

La matemática juega un rol fundamental cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y sus variaciones. En este sentido, el estudio de los procesos de variación y cambio es fundamental para la generación y evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, de contextos cotidianos, científicos o profesionales. Así, el estudio de las funciones ocupa un espacio importante en la currícula de matemática de esta carrera.

En los últimos tiempos se enfatiza la importancia del estudio de las funciones desde los primeros cursos de la escuela, especialmente por su uso en la resolución de problemas. En los diseños curriculares para la educación secundaria en Argentina se propone su estudio en distintos registros (coloquial, numérico, gráfico, algebraico), favoreciendo la modelación de situaciones en diversos contextos, que permiten caracterizar las nociones de dependencia y variación. En particular, en las orientaciones curriculares propuestas para el Ciclo Orientado, se lee:

> La modelización de situaciones extra e intramatemáticas mediante funciones permite interpretar y caracterizar las nociones de dependencia y variabilidad -constitutivas de la noción de función- y seleccionar la representación más adecuada a la situación: tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos. Son variadas las situaciones de la realidad que tienen un comportamiento que admite ser descripto mediante funciones, lo que constituye un eje rico en oportunidades para vincular con las distintas Orientaciones. (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2013, p. 21)

Sin embargo, al comenzar su estudio en el primer año de la universidad, se observan dificultades en la comprensión de las funciones. En muchos casos, los estudiantes logran caracterizarlas a través de una tabla de valores, su definición algebraica y su representación gráfica. Pueden plantear y resolver problemas sencillos. Sin embargo, tienen dificultades al ser enfrentados a situaciones que requieren una interpretación variacional de ciertas nociones.

Numerosos investigadores en educación matemática exponen esta problemática. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) expresan que los estudiantes que comienzan sus estudios universitarios tienen una comprensión deficiente sobre las funciones. Hacen referencia a los resultados de Tall (1992, citado por Carlson et al., 2003), quien encontró que, aunque las imágenes conceptuales de función de alumnos universitarios de los primeros niveles incluían una noción de correspondencia, la idea de operación, ecuación, fórmula y gráfica, no abarcaba la concepción de dos variables cambiando en forma conjunta, cada una con respecto a la otra. Los autores remarcan que en los cursos universitarios de los primeros años no se realizan tareas que permitan solucionar esta deficiencia.

Pérez (2011) afirma que, al no confrontar a los estudiantes con situaciones que les permitan desarrollar conocimientos y habilidades matemáticas relacionadas a la variación y a la modelación de fenómenos, no se favorece la modificación de sus estructuras cognitivas y no se les da la posibilidad de construir conocimiento matemático que sea significativo para su vida.

Por su parte, Cantoral, Montiel y Reyes (2014) señalan que las situaciones variacionales no se presentan al estudiante en su entorno como expresiones matemáticas, sino como datos, gráficos o problemas contextualizados, por lo cual es fundamental plantear en el aula situaciones que permitan identificar las variables, cuantificarlas, establecer relaciones entre ellas, analizar cómo cambian y cómo se relacionan sus cambios. Esto significa que la escuela "debe proveer de conocimientos funcionales, esto es, de herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea: poner en uso el conocimiento matemático" (p. 22).

Es así que resulta necesario ampliar el análisis realizado en los niveles escolares previos, que permita a los estudiantes la comprensión de las funciones desde una perspectiva variacional, a fin de proporcionar una base significativa para el estudio del cálculo. De este modo podrán aplicar el conocimiento escolar a la resolución de problemas, esto es, un uso funcional del conocimiento matemático.

Esto lleva a investigar sobre la naturaleza y formas de propiciar en el aula la construcción de conocimiento matemático significativo relacionado a las funciones. En este trabajo en particular, se aborda el estudio de la función de primer grado.

2. Antecedentes y justificación

Distintos autores muestran cómo el desarrollo de actividades matemáticas relacionadas a prácticas como la modelación y la predicción de fenómenos de naturaleza variacional, favorece la comprensión de nociones y conceptos tales como razón de cambio, función, límite y derivada, entre otros, generando y favoreciendo aprendizajes significativos así como un uso funcional de conocimiento matemático en la resolución de problemas.

Caballero y Cantoral (2015, p. 308) señalan:

> …el desarrollo de ideas ligadas a lo variacional puede ayudar a los estudiantes a tener mejores herramientas, en cuanto a argumentaciones y significaciones para enfrentar situaciones, no sólo en lo referente a las asignaturas escolares, sino más ampliamente, en actividades profesionales relacionadas con fenómenos físicos, químicos, biológicos, entre otros. Esto se debe a que el cambio y la variación se encuentran en las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, a partir de las cuales la predicción, y por tanto lo variacional, se construye socialmente (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006; Cantoral, 2013).

Por otro lado, Posada y Villa (2006) expresan que el papel preponderante que ha tenido la modelación de fenómenos de variación en el desarrollo histórico del concepto de función sugiere que el tratamiento de situaciones relacionadas con este tipo de fenómenos proporciona ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes a reconocer en este concepto un modelo matemático que permite describir, sistematizar y organizar situaciones en contextos de variación y cambio. A partir de análisis preliminares proponen consolidar el desarrollo del pensamiento variacional a través de tres elementos:

> …la noción de variación base para la construcción del concepto matemático de variable, el proceso de modelación matemática como estrategia didáctica para la construcción matemática de relaciones y variaciones, y los sistemas semióticos de representación como elementos que auxilian este proceso de modelación y permiten objetivar los conceptos matemáticos (p. 171-172).

Con relación a la función de primer grado opinan:

> Para el caso de los fenómenos que implican variaciones cuya razón de cambio es constante, se puede reconocer que es la función lineal el modelo matemático de los mismos. Por tanto, dicha constante es el eje central en la identificación del concepto como un modelo matemático (p. 173).

Señalan también que la función de primer grado, caracterizada por la razón de cambio constante, representa una estructura más general de la proporcionalidad entre magnitudes que permite "visualizar y sistematizar los diferentes estados de variación lineal entre dos cantidades de magnitud, es decir, la correlación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de diferencias es una constante" (p. 113).

Carlson et al. (2003) sostienen que la comprensión de situaciones que involucran la razón de cambio es fundamental tanto para el entendimiento de nociones involucradas a las funciones, como para la interpretación de modelos variacionales y la comprensión de los conceptos principales del cálculo. Subrayan la necesidad de fomentar el razonamiento covariacional de los estudiantes, esto es, el desarrollo de actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. En este sentido destacan la importancia de que los estudiantes tengan oportunidades de analizar la naturaleza covariacional de las funciones en situaciones de la vida real.

Pérez (2011) expone sobre la complejidad que supone la construcción de conocimiento matemático y la generación de aprendizajes funcionales, en el sentido de que los estudiantes sean capaces de reconstruir significados de manera permanente, que les permitan integrar la matemática a su vida cotidiana y resolver los problemas que se le presentan. Esto exige el rediseño del currículo matemático de manera que "favorezca el desarrollo de prácticas educativas en las cuales los estudiantes hagan uso de la matemática para analizar, comunicar información, entender o explicar fenómenos de la ciencia y situaciones de su entorno, así como, para tomar decisiones" (p. i). La autora concibe el aprendizaje en precálculo como:

> …el producto de la actividad humana de los estudiantes para modelar lo cambiante por medio de la interacción en procesos de conceptualización, operación y formalización de lo variacional tanto en el plano matemático como en el sociocultural. Por tanto, dicho aprendizaje será construido en la medida que ellos logren desarrollar recursos y estrategias variacionales para modelar actividades de tal naturaleza. (p. 48)

En este sentido investigó cómo reorganizar los contenidos de precálculo en unidades didácticas que tienen como objetivo que los estudiantes desarrollen conocimientos y herramientas matemáticas que les permitan entender y explicar fenómenos de naturaleza variacional. Teniendo en cuenta análisis preliminares, diseñó y puso en práctica una unidad que tiene como finalidad la modelación y la generación de aprendizajes relacionados a la función de primer grado. Afirma que algunas tareas matemáticas que pueden permitir el estudio de esta función desde un punto de vista variacional son: reconocer que la relación entre las dos variables involucradas es constante, cuantificar los cambios de cada variable y calcular cuánto se incrementan los valores de una variable con respecto a la otra, identificar la relación lineal de manera numérica y gráfica, estimar y explicar que tan rápido cambia lo que cambia, representar algebraicamente la relación a partir de su representación gráfica, relacionar la variación constante expresada verbalmente con su gráfica. En sus conclusiones señala que la modelación de lo variacional otorga un significado a la matemática que se intenta construir. La naturaleza misma de las situaciones y la discusión de los aspectos variacionales, favorece la evolución de los recursos y habilidades matemáticas de los estudiantes, a la vez que se propicia el vislumbramiento de aspectos funcionales de la matemática y el contexto que permite relacionar las experiencias de los estudiantes con las situaciones planteadas.

La revisión de antecedentes permite considerar que un acercamiento variacional al estudio de la función de primer grado, que pretenda identificar a la razón constante entre los cambios de la variable dependiente con respecto a los cambios de la variable independiente como la característica principal de estas funciones, y que busque poner al estudiante en actividad matemática a partir de las numerosas situaciones que se presentan en la vida cotidiana y en las ciencias, puede favorecer la comprensión, la construcción de conocimiento matemático funcional y el desarrollo del pensamiento.

3. Elementos teóricos

En el marco de la educación matemática, se coincide con Cantoral, Montiel y Reyes (2014) en reconocer la importancia de la actividad social en la construcción de conocimiento, asumida ésta en relación a los usos del conocimiento matemático.

En este sentido, el pensamiento y lenguaje variacional, como línea de investigación y como forma de pensamiento, ofrece elementos teóricos que permiten encuadrar este trabajo. Cantoral et al. (2003) expresan:

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales. (p. 185)

Esta línea de trabajo atiende el estudio sistemático de las nociones de variación y cambio en distintos contextos de las ciencias, en la vida cotidiana y en la matemática misma. Se centra “en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios” (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1196). Se caracteriza por proponer el estudio de situaciones relacionadas a fenómenos de cambio que se basan en el uso de los conocimientos matemáticos que se pretenden significar. Para estos autores, una situación variacional es “el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de *estrategias variacionales* y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio" (p. 1199).

Una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando "hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p. 464).

En este marco, el desarrollo del pensamiento variacional tiene lugar dentro de una situación variacional, en la que el uso de distintas estrategias variacionales genera el estudio de la variación, ya que sirven como punto de partida para el análisis y la reflexión sobre el cambio y sus efectos. Esto facilita la identificación de lo que cambia en una situación, el análisis de la manera en que se dan los cambios y la cuantificación de esos cambios.

Con la implementación de situaciones que propician el desarrollo del pensamiento variacional se fomenta la formulación de conjeturas, su puesta a prueba, su generalización, la argumentación que permita sustentarlas o rechazarlas. Se promueven así procesos cognitivos que van más allá de la memoria y la algoritmia. En este sentido es fundamental proponer tareas de tratamiento y conversión entre las distintas representaciones del concepto de función. De acuerdo con Duval (2008), no hay pensamiento matemático sin estas dos actividades cognitivas fundamentales, esto es tareas que impliquen la transformación de la representación en el mismo registro en la que ha sido formada y su coordinación con representaciones en otros registros.

Por otro lado, si el interés es que estos conocimientos se incorporen a las estructuras lógicas de los estudiantes y el desarrollo de su pensamiento matemático, se debe rever el papel del docente y del alumno en el aula, buscando alternativas que favorezcan la participación activa de este último, que lo lleven a involucrarse en la construcción de su propio conocimiento (Cantoral, 2013). Así, el rol del docente pasa de expositor a guía, mediador y facilitador. El profesor debe ser capaz de diseñar situaciones de aprendizaje que permitan la aplicación de conocimientos y lleven a la resolución de problemas, que promuevan la actividad individual y grupal de los alumnos, que les otorgue más responsabilidad y que los involucre en su propio proceso de aprendizaje.

En este sentido se asume una situación de aprendizaje como:

> …un espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión mediante el cual logran construir significados que comparten. Las situaciones de aprendizaje se construyen de acuerdo a los conocimientos que el alumno debe aprender y a las características que estos saberes presentan y se realizan con un método óptimo. (García, 2011, p. 16)

Según la misma autora, todos y cada uno de los estudiantes deben tener oportunidad de manifestar sus conocimientos previos, "…los que constituirán una base sobre la cual construir aprendizajes como resultado de acciones conjuntas…" (p. 16). Así, los estudiantes logran construir conocimiento y, lo que es más importante, utilizar ese conocimiento en distintos contextos, resolviendo problemas.

4. Aspectos metodológicos

En base a lo manifestado, se decidió diseñar e implementar una situación de aprendizaje que permita dar significado a nociones relacionadas a la función de primer grado como modelo de fenómenos de cambio y que involucre al alumno en la construcción de conocimiento significativo y funcional. Se implementó con todos los alumnos cursantes de Matemática I en comisiones de aproximadamente 35 alumnos, en tres fases, que se desarrollaron en tres clases sucesivas, de una, dos y una hora respectivamente. La fase inicial, de motivación y exploración de los conocimientos previos, una intermedia, que tuvo como finalidad utilizar y relacionar esos saberes previos para construir nuevos conocimientos y significados, y una fase final, de integración y valoración de los aprendizajes.

En la fase inicial los alumnos resolvieron con lápiz y papel tres actividades, trabajando de a pares. Se intentó recuperar los conocimientos sobre la función de primer grado y aportar elementos para mejorar su comprensión y su significado desde un punto de vista variacional.

La docente entregó una copia de los enunciados a todos los alumnos. En esta etapa dejó que los alumnos trabajaran solos. Su papel fue de orientación y motivación para que realicen las actividades. Sólo intervino cuando no entendían los enunciados. Al finalizar el tiempo de trabajo, los estudiantes entregaron una de las resoluciones y la otra la guardaron para la discusión grupal y el control de las respuestas durante la clase siguiente.

En la primera parte del segundo encuentro, fase intermedia, se inició el debate. A partir de lo observado en la clase anterior y de las dificultades y logros detectados en las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes, la docente coordinó una puesta en común. Sus intervenciones fueron para guiar la discusión, pedir explicación sobre las estrategias y procedimientos utilizados y, especialmente, promover el reconocimiento de la variación en las situaciones propuestas. Luego, la profesora explicó y formalizó el trabajo realizado por los alumnos. Relacionó los aspectos numéricos, gráficos y analíticos de los conceptos involucrados, e introdujo las nociones variacionales que cada actividad permitía resaltar.

En la fase final se propuso la resolución de nuevas situaciones con las que se pretendió conocer su avance con respecto al desarrollo de nociones y significados variacionales y valorar la comprensión respecto de los conceptos involucrados.

5. Diseño de las actividades y resultados de su implementación

De acuerdo a la revisión teórica y de antecedentes realizada, se resolvió considerar actividades que propicien el desarrollo de tareas de naturaleza variacional, así como el tratamiento y conversión entre distintas representaciones del concepto de función (verbal, numérica, gráfica, algebraica).

Se presentaron situaciones sencillas, del contexto cotidiano, que permitan a los estudiantes descubrir el rol fundamental que tienen los incrementos de las cantidades de las variables independiente y dependiente, así como el cociente entre los mismos, para construir el modelo de la función correspondiente a la situación planteada.

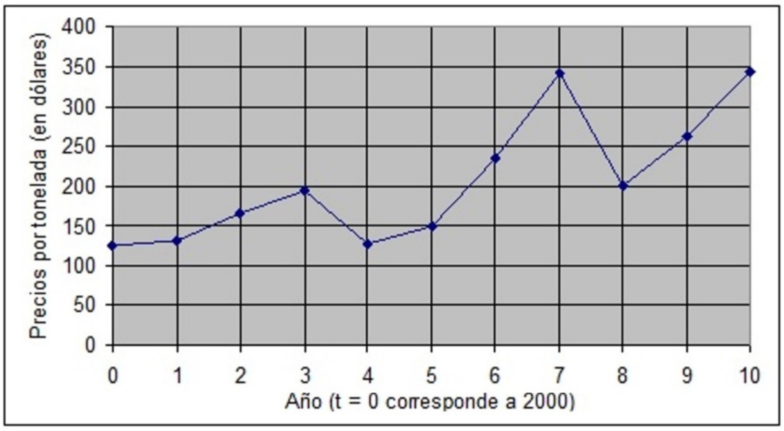
Con su desarrollo se pretendió que los estudiantes valoren el uso de los conocimientos matemáticos en su área de especialidad. Se previó que puedan apelar a sus conocimientos previos y a la intuición para resolverlas.

Su resolución promovió distintas tareas:

- La identificación de magnitudes asociadas a situaciones de variación, presentadas en distintos sistemas de representación.
- La descripción de las relaciones entre las variables en un proceso de cambio.
- La identificación de situaciones de razón de cambio constante y de una situación de variación constante con la recta o con segmentos de recta.
- La justificación de las estrategias usadas para cuantificar los cambios a partir de las distintas representaciones.
- El reconocimiento de la razón de cambio para analizar cuánto cambia una variable cuando la otra cambia determinada cantidad.
- La comparación de razones de cambio para reconocer la mayor o menor rapidez de cambio.
- La relación entre la razón de cambio constante y la pendiente de la recta.

A continuación, se enuncian las actividades, se desarrolla un breve análisis a priori de cada una y se presentan los resultados, esencialmente cualitativos, de la revisión de las hojas de trabajo de los alumnos. El análisis, realizado sobre 72 producciones, tiene en cuenta el desarrollo e interpretación de los aspectos variacionales involucrados, así como las transformaciones entre distintas representaciones semióticas. Los logros y dificultades detectados son importantes para las etapas de validación e institucionalización del conocimiento.

Actividad 1. La gráfica muestra la tendencia de los precios del trigo durante el período 2000-2010. Los precios tomados corresponden al mes de diciembre de cada año analizado.



Elaboración propia sobre datos extraídos de
http://www.siia.gov.ar/index.php/series-por-tema/agricultura.

a) Determine los períodos en los que el precio tuvo el mayor y el menor cambio. Determine si en esos períodos el precio por tonelada de trigo aumentó o disminuyó. ¿Cuánto aumentó o disminuyó?

b) Encuentre la pendiente del segmento de recta que conecta los años 2006 y 2007 y del segmento que conecta los años 2007 y 2008. Interprete su significado en el contexto del problema.

Se presenta una gráfica extraída de una página web, de interés particular para los productores agropecuarios y, por ende, para estudiantes de agronomía.

Su resolución exige el tratamiento a partir de la representación gráfica y la conversión al registro numérico y al verbal. Los alumnos deben ser capaces de identificar las variables involucradas, los valores que toma la variable dependiente para un valor específico de la independiente y determinar cómo cambia una variable cuando cambia la otra. Para esto, primero es necesario fijar la atención en el comportamiento global de la función, en todo su dominio y por intervalos, y luego en el comportamiento puntual.

En el primer inciso se requiere la comparación del cambio de la variable dependiente, referido a la variación en un período específico de tiempo.

Al analizar las respuestas se observó, en primer lugar, diferencias al considerar los períodos. Gran parte de las parejas (52) consideró intervalos de un año, mientras que 13 consideraron períodos diferentes. En estos casos se observa que su elección tuvo en cuenta los tramos donde la gráfica crece o decrece o bien, aquellos que gráficamente parecen corresponder a la misma recta.

Se encontró también que siete parejas no pudieron establecer períodos. Se refieren al cambio en determinado año, lo que muestra que no lograron comprender la situación.

Se estudiaron luego los aspectos cualitativos, referidos a cómo cambia, y los cuantitativos, respecto a cuánto cambia.

Se detectaron problemas de interpretación en la identificación de los períodos en que el precio tuvo el mayor y el menor cambio. En diez trabajos se observó que identificaron mayor cambio con el intervalo de mayor aumento del precio del trigo, y el de menor cambio con el de mayor disminución del precio. Por ejemplo, una respuesta fue: *"El período que tuvo mayor cambio fue del 2006 al 2007 que aumentó 100 U$S. El período que tuvo menor cambio fue del 2007 al 2008 que disminuyó 140 U$S"*.

Del total, el 57 % respondió que el mayor cambio se dio en el período 2007-2008, correspondiendo a una disminución de los precios, mientras que el menor cambio se produjo en el período 2000-2001, con un aumento de los precios.

Los alumnos que habían considerado períodos de distinta amplitud, analizaron según su respuesta anterior. Respondieron correctamente diez parejas.

Con respecto a la pregunta relacionada con la cuantificación de los cambios, el 60% calculó cuánto cambió el precio en los períodos seleccionados, mientras que el resto sólo expresó entre qué valores varió. En la Figura 1 se presenta una resolución en la que aparecen las dos respuestas.

ACTIVIDAD 1:

a) - • EL MAYOR CAMBIO SE DA EN EL PERIODO QUE CORRESPONDE DEL AÑO 2007 AL 2008, DONDE SE OBSERVA UNA DISMINUCIÓN DEL PRECIO, DE $350 HASTA $200 POR TONELADA, ES DECIR, UNA BAJA DEL PRECIO DE APROX. $150.

• EL MENOR CAMBIO LO OBSERVAMOS EN EL PERIODO QUE VA DESDE EL AÑO 2000 - 2001, DONDE SE NOTA UNA PEQUEÑA SUBA DEL PRECIO POR TONELADA, DE APROX. $10

Figura 1

Estas respuestas requieren el tratamiento de la información en el registro gráfico y su conversión al registro numérico, lo que permite la cuantificación del cambio, al realizar las diferencias de las ordenadas de las imágenes de los puntos correspondientes a los extremos de los intervalos.

En otros casos, los alumnos realizaron un análisis más detallado de la evolución de los precios a través del tiempo. Trabajos como el de la Figura 2, implican la comparación en el registro gráfico, de las pendientes de los distintos tramos, lo cual está relacionado a un concepto dinámico de pendiente. Resulta interesante la estrategia para organizar los datos obtenidos de la gráfica. La determinación de si *el precio del trigo aumentó* o *disminuyó* lleva al otorgamiento de significado al signo de los cambios y de las pendientes de los segmentos.

1a)

Año		Precio
2000-2001	- El precio Aumento levemente. →	$U 25 ↑
2001 a 2003	- El precio fue creciente. →	$U 75 ↑
2003-2004	- " Disminuye →	$U 75 ↓
2004-2005	- " Aumento nuevamente. →	$U 25 ↑
2005-2007	- El Aumento fue mayor →	$U 200 ↑
2007-2008	- El precio por tonelada vuelve a disminuir →	$U 150 ↓
2008-2010	- " " Aumenta Nobblemente →	$U 150 ↑

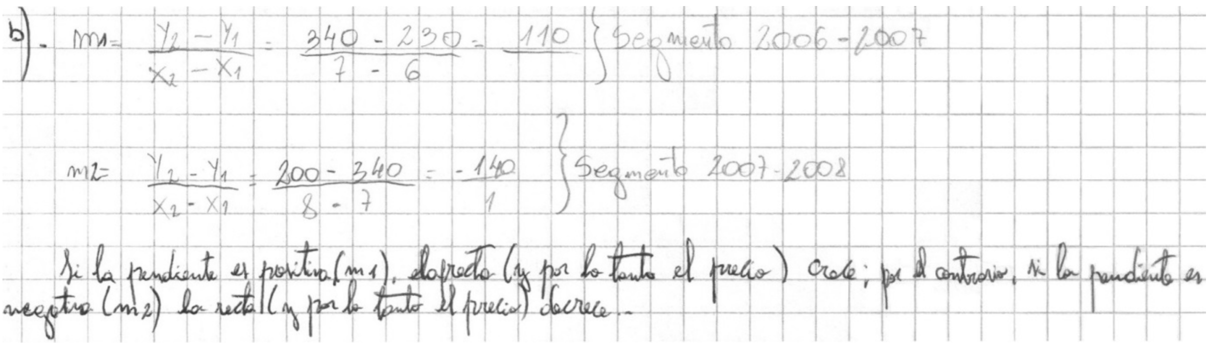
Aumento: ⇑ Disminución: ⇓

Figura 2

Estas respuestas son importantes desde una perspectiva variacional ya que suponen el análisis del cambio de un estado con el paso del tiempo. Según la caracterización realizada por Caballero y Cantoral (2013) el análisis de la forma en que cambia una variable en distintos intervalos, implica la utilización de distintas estrategias variacionales. En primer lugar, la estrategia de seriación. A partir del patrón de comportamiento de la gráfica, los estudiantes fueron capaces de analizar los estados de la función para distintos valores del tiempo. Luego de seleccionar el intervalo correspondiente al mayor y al menor cambio, analizaron el estado de la función en el punto inicial y el punto final, a fin de establecer la diferencia entre ambos, es decir, cuánto cambia la variable. Esto supone el uso de otra estrategia importante, la comparación.

En el segundo inciso se pretende conectar la pendiente de los segmentos de recta con la razón de cambio en una situación de cambio constante por tramos. De la gráfica se extrae la información necesaria para determinar el valor de la pendiente. A pesar de que los estudiantes deberían tener los conocimientos previos para calcular las pendientes, sólo en 40 trabajos lo hicieron correctamente. La mayor dificultad encontrada fue que 12 parejas trabajaron con la variable independiente medida directamente en años.

Con respecto a la interpretación en el contexto del problema, la mayoría hizo alusión al cambio del precio. Asociaron el signo positivo de la pendiente con aumento del precio y el signo negativo con una disminución. Aunque no lograron darse cuenta de que en los cálculos realizados se relacionan los cambios de las dos variables en juego, identificaron el significado del signo de la pendiente e incluso algunos lo vincularon a la recta creciente o decreciente, como por ejemplo, en el trabajo de la Figura 3.



b) - $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{340 - 230}{7 - 6} = \frac{110}{}$ } Segmento 2006-2007

$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{200 - 340}{8 - 7} = \frac{-140}{1}$ } Segmento 2007-2008

Si la pendiente es positiva (m_1), la recta (y por lo tanto el precio) crece; por el contrario, si la pendiente es negativa (m_2) la recta (y por lo tanto el precio) decrece.

Figura 3

Una interpretación más completa exige que los estudiantes visualicen la coordinación entre los valores de las variables que cambian de manera conjunta, es decir, el cambio de una variable con respecto a la otra. Se encontró que en sólo tres trabajos se acercaron a una interpretación de la pendiente como razón de cambio: *"La pendiente indica lo que cambia el precio por tonelada de un año para otro", "la pendiente indica la variación del precio por tonelada de año a año", "en el año 2006 y 2007 el precio subió 110 dólares por año mientras que en el 2007 al 2008 disminuyó 150 dólares en 1 año".*

Aparecieron otras conclusiones importantes para el análisis variacional, como las de algunos alumnos que agregan que en el período 2006-2007 la pendiente muestra que se dio el mayor aumento, mientras que en el período 2007-2008 se produjo la mayor disminución.

En general, se puede concluir que la resolución de esta actividad permitió la realización de distintas tareas de carácter variacional: identificaron qué cambia (precio, variable dependiente) y reconocieron con respecto a qué cambia (tiempo, variable independiente), identificando la relación entre ambas. Interpretaron la variación (para determinar los períodos de mayor y menor cambio, para determinar si el precio aumentó o disminuyó, para relacionar el significado de la pendiente con el de razón de cambio), cuantificaron los cambios, argumentaron sobre la variación.

Los alumnos fueron capaces de leer global y puntualmente la gráfica, lo que les permitió extraer información sobre el comportamiento de la función por intervalos y en puntos específicos. Su interpretación les permitió argumentar sobre los intervalos de mayor o menor cambio y determinar cuánto cambia la variable en esos intervalos. Su conocimiento matemático sobre la pendiente fue usado y, aunque les costó interpretarla como una razón de cambio, fue resignificado al relacionar los intervalos de mayor o menor cambio y los de cambio positivo y cambio negativo, con la inclinación de los segmentos de recta.

En la etapa de discusión e institucionalización de la actividad se introdujo la notación simbólica de los cambios (estado inicial, estado final, cuantificación del cambio y la razón de cambio) e interpretó el significado del signo de los cambios. Es importante resaltar que, en problemas aplicados a diversos contextos, la pendiente se puede interpretar como una razón de cambio (o tasa de cambio), además de usar la noción de razón de cambio para comparar los cambios en los distintos períodos y reconocerla como una herramienta que permite distinguir situaciones de mayor o menor rapidez de cambio.

Actividad 2. Un edificio tiene un tanque cilíndrico para reserva de agua. El tanque, de 45000 litros de capacidad, se encuentra totalmente lleno y comienza a vaciarse para hacerle mantenimiento. Se desocupa a razón constante, de tal forma que al cabo de 2 horas quedan 30000 litros.

a) ¿Cuánto tiempo hace falta para que el tanque se desocupe completamente?

b) ¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 22500 litros a 11250 litros?

c) Si el volumen del tanque fuera el doble y se desocupa a razón constante, ¿qué debe hacerse para que luego de 2 horas también queden 30000 litros?

El objetivo de esta actividad es construir conocimiento matemático relacionado a la función de primer grado, a partir del reconocimiento de la razón de cambio constante que la identifica. En este caso, el modelo lineal no queda explícito en el enunciado. Su resolución supone comprender qué significa y qué datos aporta que el tanque se desocupe a razón constante. Para esto es importante centrar la atención en la variación y no sólo en las variables.

El alumno debe ser capaz de determinar las magnitudes que cambian como las variables independiente y dependiente, identificar los incrementos del tiempo y el volumen del tanque como herramientas que permiten cuantificar el cambio, identificar la capacidad inicial del tanque como un parámetro constante que representa el estado inicial que no varía.

La actividad está enunciada en el registro verbal. Su resolución requiere en primer lugar el tratamiento en este registro, traduciendo del lenguaje cotidiano al específico de la matemática. La comprensión del significado de las preguntas en el contexto del problema no es un proceso trivial.

Las preguntas plantean la predicción sobre estados futuros correspondientes a la situación dada. Requieren el análisis y cuantificación de los datos numéricos y de sus cambios y/o el planteo del modelo algebraico, con la finalidad de, a partir de valores o estados conocidos, anticipar valores o estados futuros. Estas tareas llevarán a realizar conversiones a los registros numérico, gráfico o algebraico.

Al revisar los trabajos, se encontró que el 80% respondió correctamente el primer inciso mientras que sólo el 25% analizó correctamente el segundo. La mayoría no respondió lo pedido ya que determinó el tiempo que se demora en vaciar los 11250 litros.

Los estudiantes trabajaron en distintos registros y utilizaron diferentes representaciones. En el enunciado están dados, de manera no explícita, dos pares de valores de la función, por lo que se presumía que buscarían la expresión algebraica que modela la situación. Sin embargo, muchos utilizaron estrategias y argumentos numéricos y/o gráficos, así como algunos transitaron de un registro a otro, especialmente del numérico al gráfico, convirtiendo nuevamente al numérico y al verbal para interpretar las soluciones. Recurrieron a la tabulación, analizaron los datos a partir de la tabla numérica y construyeron gráficas que interpretaron variacionalmente. De esta manera, lograron realizar acciones identificadas por Caballero y Cantoral (2013) como tareas variacionales.

Para responder a las preguntas, utilizaron distintos procedimientos que muestran que relacionaron el fenómeno de vaciamiento a razón constante con una situación de proporcionalidad directa. Aplicaron directamente regla de tres, subdividieron los incrementos de las dos variables puestas en juego, realizaron tareas de interpolación, calcularon las razones entre los incrementos, representaron el fenómeno en una gráfica, llevaron registros de la situación en distintos períodos de tiempo o encontraron el modelo algebraico correspondiente.

En el trabajo de la Figura 5, los estudiantes realizaron tareas de conversión y tratamiento en el registro numérico.

A partir de los datos construyeron una tabla de valores y realizaron un procedimiento de interpolación de manera de responder las preguntas.

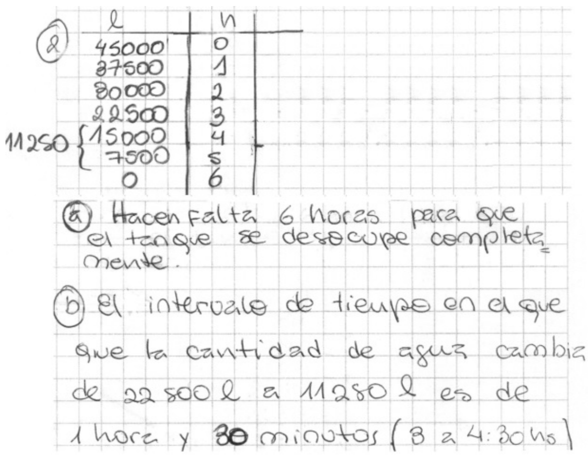


Figura 5

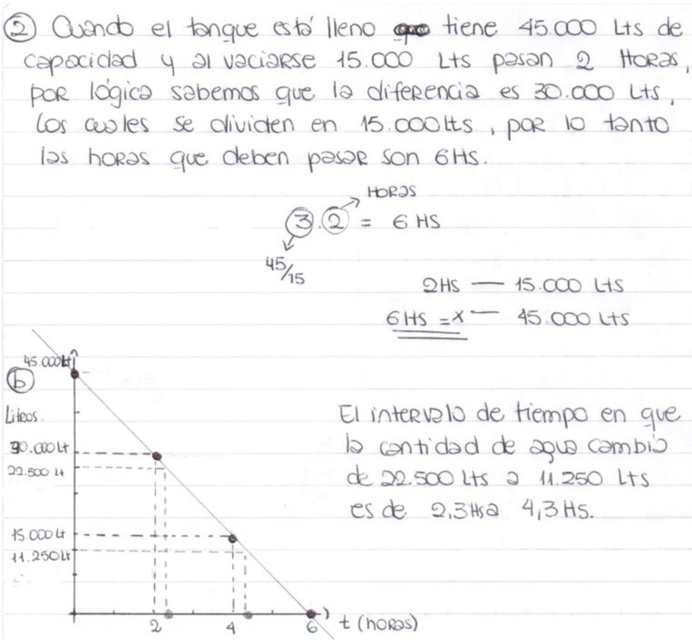


Figura 4

En este trabajo, los alumnos realizaron tareas de conversión y tratamiento en los registros numérico y gráfico.

Mostraron de varias maneras cómo obtener el tiempo que demora el tanque en vaciarse. Utilizaron estrategias que implican el reconocimiento de una relación de proporcionalidad: sumas y restas, cociente y producto, regla de tres.

Para determinar el intervalo de tiempo en que la cantidad de agua pasa de 22 500 a 11 250 litros, representaron gráficamente la función que modela la situación y utilizaron esta representación para aproximar, aunque con errores, la respuesta.

En la figura siguiente se observa cómo representaron los datos en el registro gráfico, convirtiendo al registro algebraico para determinar la ley de la función. Utilizaron el modelo algebraico para determinar lo pedido en cada inciso.

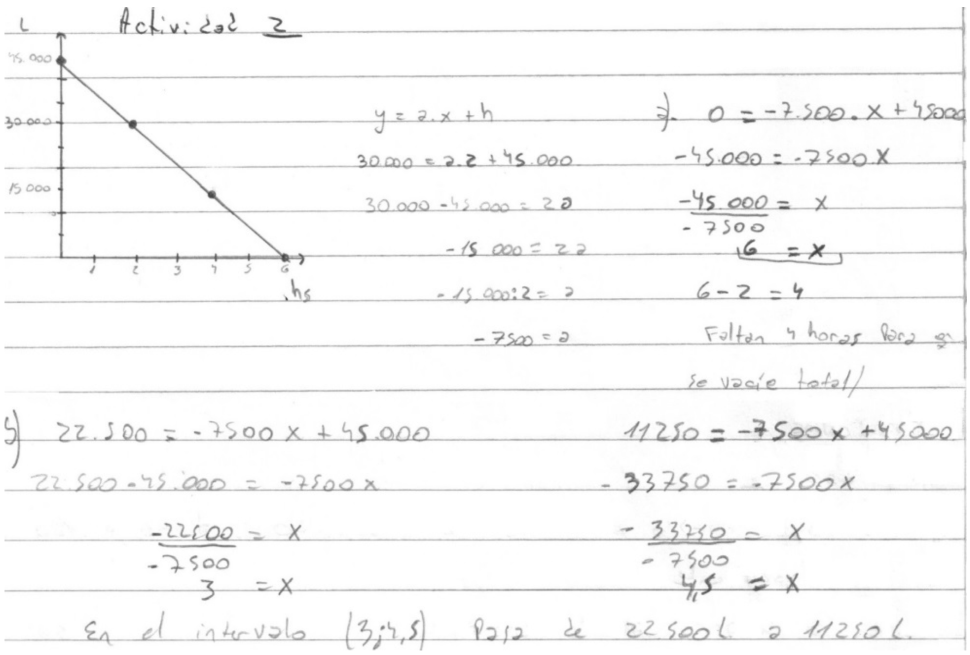


Figura 6

En este caso, los alumnos trabajaron en los registros numérico y gráfico. Utilizaron regla de tres para determinar el tiempo que se requiere para vaciar el tanque y luego usaron los datos para representar gráficamente la función.

Realizaron una tarea de tratamiento en el registro gráfico, efectuando un proceso de interpolación que les permitió responder el segundo inciso de manera correcta.

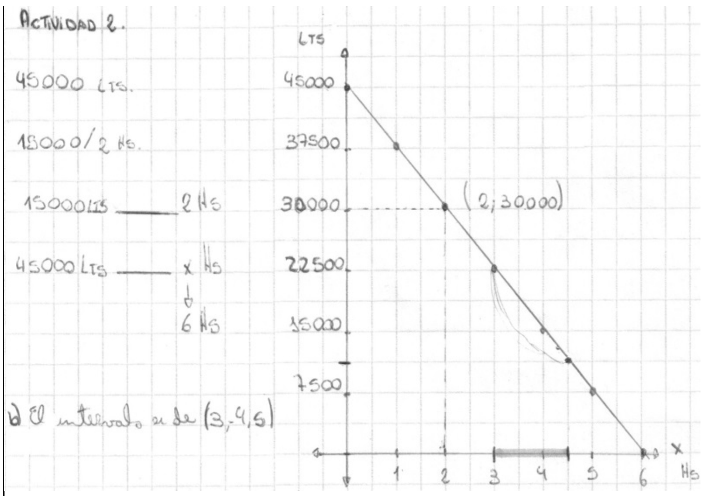


Figura 7

Las tareas y estrategias utilizadas por los alumnos coinciden con las detectadas en otras experiencias relacionadas al estudio de la función de primer grado. Se coincide con Méndez y Arrieta (2009) en la importancia de estas prácticas, quienes las reportan como prácticas comunes de la modelación lineal. Favorecen la aparición de herramientas matemáticas y argumentativas y llevan a que los estudiantes puedan enfrentarse a situaciones similares en otros contextos.

Para responder al inciso c), 24 alumnos recurrieron a procedimientos similares a los utilizados en el inciso a) (aplicaron regla de tres, hicieron una tabla, determinaron el nuevo modelo algebraico, representaron gráficamente).

De los alumnos restantes, 22 enunciaron una respuesta en la que se vislumbra un análisis que tuvo en cuenta los resultados anteriores. No todos hicieron referencia explícitamente a la velocidad de vaciado, pero sí a aumentar, de alguna manera, el caudal de salida. En la Figura 8 se presentan un par de respuestas.

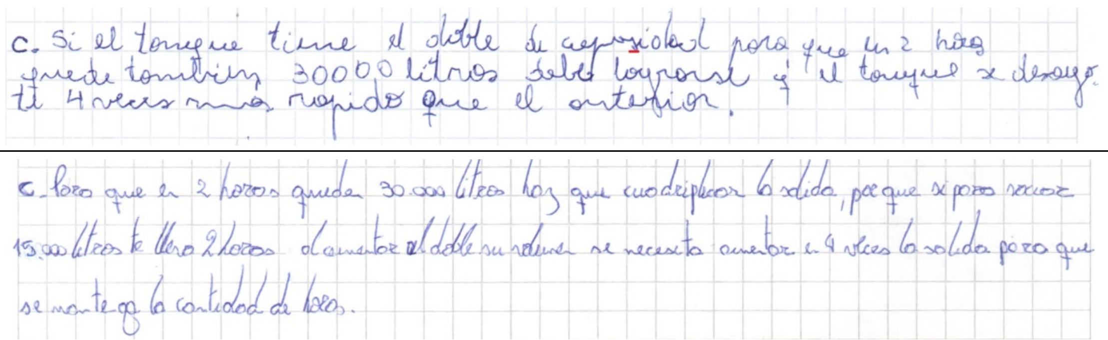


Figura 8

Este tipo de análisis implica el reconocimiento de la proporcionalidad de los datos, y requiere además la comparación entre dos estados de fenómenos distintos.

La naturaleza del fenómeno variacional presentado en esta actividad, permitió que interpretaran sus características y respondieran las preguntas recurriendo a distintas herramientas. En la etapa de discusión grupal se insistió sobre la validez de la utilización de la regla de tres, se examinó cómo se refleja la razón constante en las distintas estrategias y representaciones utilizadas, y cómo se relaciona la razón con la pendiente de la recta.

Es importante resaltar que los alumnos utilizaron su conocimiento sobre el significado de la razón de cambio en un contexto específico. Esto les permitió dar nuevos significados a las nociones relacionadas a la función de primer grado, así como generar nuevo conocimiento matemático.

Actividad 3. Para estimar la edad de los árboles los biólogos emplean un modelo lineal que relaciona el diámetro del árbol con la edad. El modelo es útil porque es mucho más fácil medir el diámetro del árbol que su edad (lo que requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para cierta variedad de robles, se determinó que el diámetro del tronco de un árbol de 24 años de edad es 10 cm y el de uno de 32 años es 15 cm.

a) Determine la ley de una función de primer grado que modele los datos. Represente gráficamente.

b) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.

c) Explique el significado de la pendiente en el contexto del problema.

Esta actividad (adaptada de un problema presentado por Stewart, Redlin y Watson, 2012) plantea la obtención de la expresión algebraica de la función de primer grado correspondiente a los datos presentados. Esto exige básicamente la conversión del registro verbal al algebraico, pero puede dar lugar al tratamiento y conversión entre representaciones de los registros numérico y gráfico.

Al leer el problema, surge que los biólogos determinan la edad de los árboles a partir de la medición del diámetro del tronco. La variable dependiente es la edad del árbol y la variable independiente es el diámetro del tronco. Luego, la edad del árbol es una función de primer grado del diámetro del tronco. Este aspecto hace interesante el problema ya que los estudiantes están más acostumbrados a trabajar con situaciones en las que el tiempo es la variable independiente.

Según los datos, los puntos P(10, 24) y Q(15, 32) pertenecen a la gráfica de la función. Se puede determinar que $1{,}6\,\frac{\text{años}}{\text{cm}}$ es la razón o tasa de cambio de la edad del árbol con respecto a la medida del diámetro. Esto significa que la edad del árbol aumenta a razón de 1,6 años por cada centímetro que crece el diámetro. Si se deja expresada como $\frac{8}{5}\frac{\text{años}}{\text{cm}}$ se puede decir que, por cada 5 cm que aumenta el diámetro, transcurren 8 años.

Comprender esta situación y lograr escribir la expresión algebraica de la función, hace mucho más sencilla la tarea de predecir, que es uno de los aspectos más importantes en relación a la modelación de fenómenos.

Al revisar los trabajos se detectó que 35 parejas respondieron los tres incisos, mientras que 14 no respondieron la actividad completa, ocho no respondieron los incisos b) y c) y 12 no contestaron el último ítem.

Al analizar las respuestas de los incisos a) y b), se observó que, en general, obtuvieron la pendiente y la ley de la función utilizando las fórmulas conocidas y determinaron la edad del árbol reemplazando en la expresión algebraica.

Sin embargo, nueve parejas determinaron la ley directamente a partir de la observación de la gráfica.

En la Figura 9 se presenta esa forma de trabajo. Se observa que, aunque parece que en un primer momento no distinguieron la variable independiente y la dependiente, luego utilizaron los datos de la gráfica para determinar la ley e incluso, para predecir el valor pedido en el segundo inciso.

Al responder sobre el significado de la pendiente, relacionaron el crecimiento del diámetro con respecto al transcurso del tiempo.

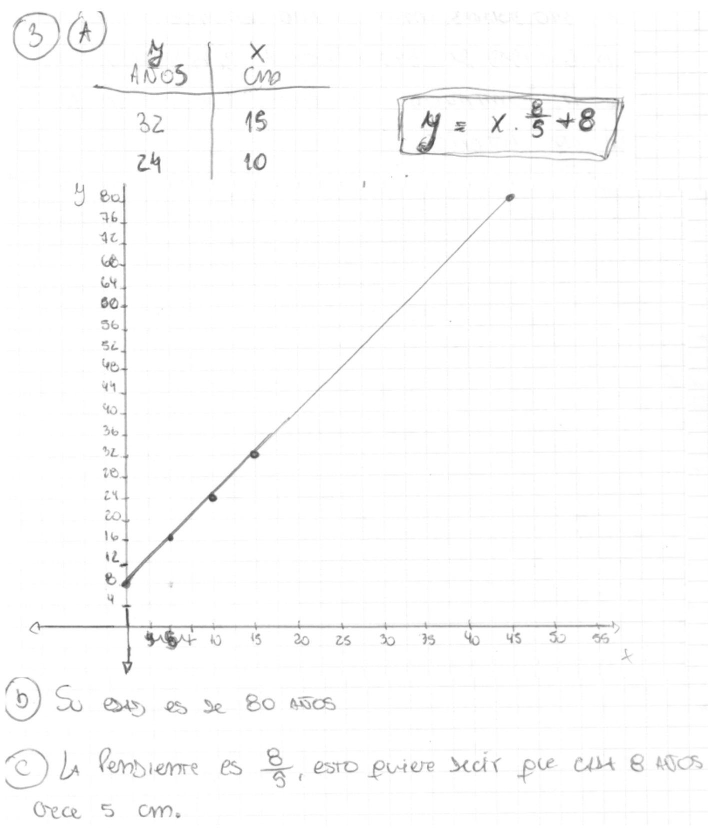


Figura 9

En relación al tercer inciso, 15 parejas escribieron alguna idea que se aproxima a la interpretación de la pendiente en la situación planteada. Algunas respuestas fueron: *"la pendiente es* $\frac{8}{5}$ *porque cada 5 cm el árbol aumenta 8 años", "el significado es que cada 8 años crece 5 cm", "la pendiente nos dice que cada una determinada cantidad de centímetros el roble crece una determinada cantidad de años. Es decir, que cada 5 cm más del diámetro del tronco el árbol tiene 8 años más", "cuando aumenta 5 cm el diámetro tiene 8 años más".*

Algunos confundieron las variables independiente y dependiente pero relacionaron la pendiente con una razón: *"el significado que tiene la pendiente en el contexto del problema es el cociente entre la variación del diámetro con respecto a la edad del árbol",* "la pendiente es la relación entre los años y el diámetro del tronco del árbol".

Como se observa en la Figura 10, los estudiantes determinaron la pendiente a partir del par de valores dado y la utilizaron para encontrar la ley de la función. Si bien la interpretación de la pendiente no es completa, se observa en la representación gráfica que tienen una comprensión clara de su significado en este registro, ya que dibujaron la recta marcando la ordenada al origen y representando la variación vertical y horizontal para encontrar otro punto que pertenece a la gráfica.

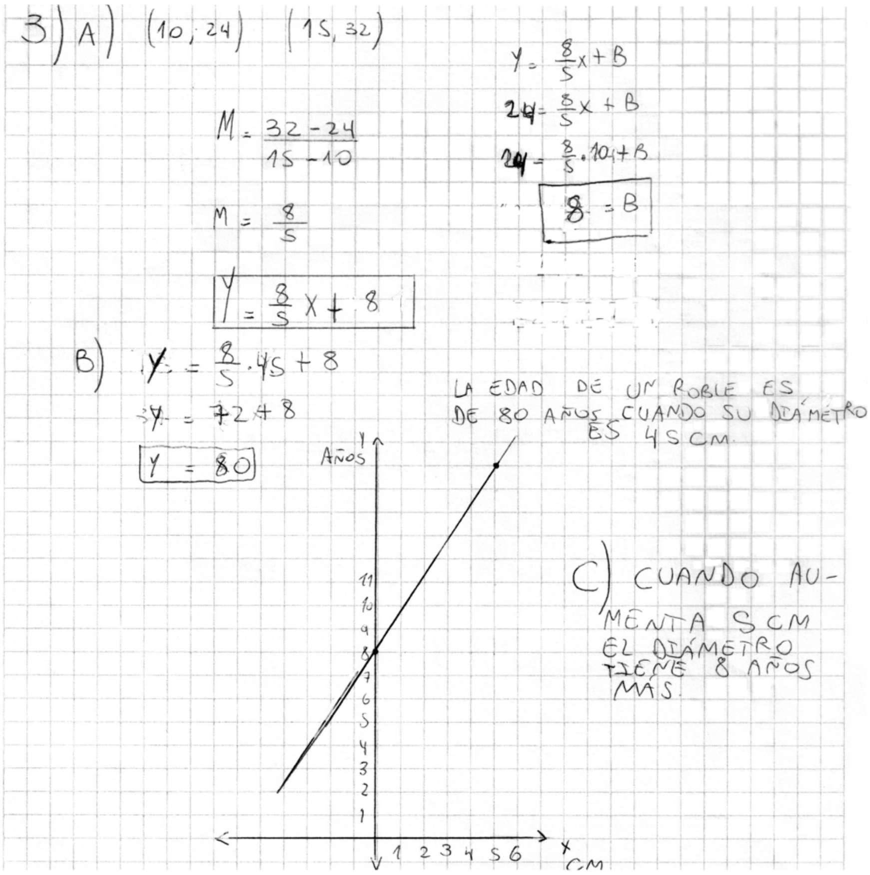


Figura 10

Se resalta nuevamente la aplicación de distintas estrategias. Los alumnos utilizaron sus conocimientos para responder a las preguntas. La resolución les exigió el reconocimiento de variables en un modelo de variación y la reinterpretación de las relaciones de dependencia. Pudieron identificar la razón que se mantiene constante, cualesquiera sean los pares de valores pertenecientes a la función que se consideren y la individualización de esta razón con la pendiente de la recta.

En el proceso de solución y en los trabajos escritos se pudo reconocer que, a pesar de que la actividad estaba redactada de manera más tradicional y se podía resolver a partir de la determinación del modelo algebraico, varios estudiantes lograron organizar y analizar la información dada registro numérico o en el gráfico y responder las preguntas. Se considera, en coincidencia con Caballero y Cantoral (2013), que son tareas que favorecen el desarrollo del pensamiento variacional.

En la etapa de debate grupal se discutió especialmente el problema con las variables y se consideraron algunas de las respuestas para resaltar los distintos aspectos variacionales que cada una de las representaciones utilizadas permite analizar y relacionarlas entre sí.

6. Reflexiones finales

El análisis general de las actividades planteadas permite expresar que se logró, por parte de los estudiantes, la realización de distintas tareas variacionales, como la tabulación, el análisis y tratamiento de los datos en una tabla, la construcción y análisis de una gráfica. Estas tareas implicaron el empleo de diferentes estrategias variacionales (la comparación, la seriación y la predicción), que les permitieron analizar la variación involucrada en cada situación y generar diversos argumentos variacionales. Todos estos elementos son importantes ya que involucran el uso del pensamiento y lenguaje variacional.

En relación a los elementos conceptuales, los alumnos lograron la individualización de las variables, la organización de los datos en tablas que facilitan el reconocimiento de la forma en que una varía en relación a la otra, la caracterización de la función y sus elementos. Fueron capaces de reconocer la razón de cambio constante como el elemento que identifica a la función de primer grado, relacionarla con la pendiente de su gráfica, así como identificar el tipo de situaciones que esta función permite modelar.

En cuanto a las representaciones semióticas, recurrieron espontáneamente al tratamiento y conversión a otros registros. Esto permitió explorar diferentes formas de manejar la información y desarrollar la capacidad de identificar los datos que son útiles para la resolución de cada situación. Esto es muy importante, ya que, como afirma Duval (2008), la diversificación de representaciones de un mismo objeto matemático es indispensable para la comprensión.

La observación del trabajo en clase y el análisis de sus resoluciones, lleva a considerar que los estudiantes resolvieron las actividades a partir de sus conocimientos previos y apelando a su intuición. Como se mostró en el análisis de distintas respuestas, el planteo de situaciones en contextos reales y cotidianos, favoreció que los alumnos utilicen sus conocimientos sobre la función de primer grado, identifiquen conexiones con el entorno que los rodea y, a su vez, den nuevo sentido y significado a los conceptos.

La metodología de trabajo permitió que todos los alumnos se involucraran y se dispusieran a analizar las actividades. La formación de parejas favoreció este aspecto, ya que ninguno tomó una actitud pasiva. Se generó un ambiente de trabajo que llevó, no sólo a realizar las tareas y responder las preguntas planteadas en cada situación, sino también a que se intercambiaran opiniones referidas a los distintos argumentos y estrategias utilizadas en los procesos de solución. Las discusiones con la clase completa fueron muy enriquecedoras, ya que les permitieron reflexionar sobre sus propias ideas, confrontar sus pensamientos y generar argumentos que permitan validarlos.

Este tipo de experiencias favorece el alejamiento de desarrollos exclusivamente procedimentales y algorítmicos que llevan a aprendizajes mecánicos, que no permiten otorgar sentido y significado a los conocimientos. A partir del planteo de situaciones cercanas al estudiante, de contextos cotidianos o relacionados a su carrera, se promueven distintas etapas de los procesos de aprendizaje, desde la formación de ideas intuitivas, hasta la internalización de los conceptos.

Para los docentes se constituyen en desafíos importantes que permiten analizar los procesos de pensamiento de los estudiantes, así como los mecanismos de construcción de conocimiento. Su implementación permite orientar la práctica docente de manera de generar en los estudiantes aprendizajes significativos.

Bibliografía

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2015). Pensamiento y lenguaje variacional: un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 307-314. México: CIMATES.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado el 03 de junio de 2015 de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_ del_ pensamiento_y_leng_v_smc_baja.pdf

Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, *11(24)*, 17-26.

Carlson, M.; Jacobs, S.; Coe, E.; Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA*, *8 (2)*, 121-156.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 39-62). Rotterdam: Sense Publishers.

García, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto derivada*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAG. Chilpancingo, México.

Méndez, M. y Arrieta, J. (2009). La experiencia como la evolución de las prácticas sociales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1353-1360. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2013). *Educación secundaria. Ciclo orientado. Orientaciones curriculares.* Recuperado el 10 de mayo de 2015 de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content /download/ 191117/ 931874/file/C.Orientado-Dic.2013.pdf

Pérez, I. (2011). *Unidades didácticas en el área de Precálculo. Un estudio sobre la efectividad de organizadores de contenido*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México.

Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Stewart, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.* México: Cengage Learning.

Autores:

Vrancken Silvia es Profesora en Matemática y Magíster en Didácticas Específicas por la Universidad Nacional del Litoral. Docente de las asignaturas del área Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Se dedica a la investigación en Educación Matemática, en especial relacionada a la enseñanza y aprendizaje del cálculo y la incorporación de las nuevas tecnologías. Esperanza. Santa Fe. Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar

Engler Adriana es Doctora en Matemática Educativa, Magíster en Educación Psico-Informática y Licenciada en Matemática Aplicada. Investigadora en Educación Matemática. Profesora Titular de las asignaturas del área Matemática de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Esperanza. Santa Fe. Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Müller Daniela es Profesora en Matemática y Magíster en Didáctica de las Ciencias Experimentales por la Universidad Nacional del Litoral. Se desempeña en el área de Educación Matemática, en especial en el uso de recursos informáticos de las tecnologías de la información y comunicación integradas a las actividades del aula tradicional. Trabaja en el desarrollo e implementación de aulas virtuales. Esperanza. Santa Fe. Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar

Leyendecker Ana es alumna avanzada de la carrera Licenciatura en Matemática Aplicada de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral. Docente de las asignaturas del área Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral.
Esperanza. Santa Fe. Argentina
aleyendecker@fca.unl.edu.ar